Sarjoista ja Riemannin sarjateoreemasta

LuK-tutkielma
Antti Sällinen
2501552
Matemaattisten tieteiden laitos
Oulun yliopisto
Syksy 2019

Sisältö

Johdanto

Tutkielmassani perehdyn reaalilukusarjoihin ja niistä eritoten ehdolliesti suppeneviin sarjoihin. Ehdollisesti suppenevat sarjat tuovat esille *äärettömyyden* käsitteen mielenkiintoisella tavalla. Äärellistä summaa voidaan manipuloida miten vain, ilman että sarjan lopullinen arvo muuttuu. Tämä pohjautuu reaalilukujen kommutatiivisuuteen. Ehdollisesti suppenevat sarjat ovat äärettömiä sarjoja, joiden termien järjestys yhteenlaskussa voi vaikuttaa sarjan arvoon. Kuuluisa saksalainen matemaatikko Bernhard Riemann esitti 1800-luvulla lauseen, jonka mukaan jokainen ehdollisesti suppeneva sarja saadaan suppenemaan kohti mitä tahansa reaalilukua.

Tutkielman alussa tarkastellaan reaalilukujonojen ominaisuuksia, niiden ollessa välttämättömiä sarjojen tarkastelua ajatellen. Jonojen jälkeen tarkastellaan sarjoja, joista päästään luontevasti Riemannin sarjateoreemaan.

Määritelmissä ja perustuloksissa olen pääsääntöisesti käyttänyt P. Hästön Oulun yliopistolle kurssimateriaaliksi luotua luentomonistetta [2].

Riemannin sarjateoreeman hieman normaalista todistuksesta poikkeava todistus pohjautuu K. Knoppin teoksen [1] todistukseen. Lauseen 2.11 todistusksen pohja löytyy O. E. Stanaitiksen teoksesta [3] sivulta 61. Olen tehnyt siihen yhden muutoksen sekä tarkentanut todistusta välivaiheiden avulla. Lisäksi lauseen 2.17 todistukseen on otettu vinkkejä V. Serovin teoksesta [4].

1 Jonot

1.1 Jonojen raja-arvo

Määritelmä 1.1. *Reaalilukujonoksi* kutsutaan kuvausta $a : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$, missä $a(n) = a_n$. Merkitään reaalilukujonoa $a_n \in \mathbb{R}$ seuraavasti

$$(a_n)_{n=1}^{m} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m \quad \text{kaikilla } m = 1, 2, \ldots$$

Tässä tutkielmassa käytämme äärettömiä jonoja, joita merkitään $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Todistuksissa käytetään välillä merkintää (a_n) helpottamaan lukemista.

Määritelmä 1.2. Luvun $a \in \mathbb{R}$ sanotaan olevan jonon $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *raja-arvo*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad aina, \ kun \ n \geq n_\varepsilon$$

Jos ehto toteutuu, niin sanotaan jonon suppenevan kohti raja-arvoaan. Merkitään tätä

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Samalla on syytä todeta, että jos jono **ei** suppene mitään lukua kohti, sanotaan sen hajaantuvan.

Huomautus 1.3. Määritelmän avulla ei voida ratkaista jonon raja-arvoa, vaan se antaa mahdollisuuden tarkastella, onko mahdollinen "arvaus" raja-arvosta oikea.

Lemma 1.4. *Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen. Eli jos* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *sekä* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, *niin on oltava, että* $a = b$.

Todistus. Tehdään vastaoletus. Oletetaan nyt, että $a \neq b$. Määritelmän mukaan on olemassa sellaiset n_ε ja $n'_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad aina, \ kun \ n \geq n_\varepsilon$$

$$|a_n - b| < \varepsilon \quad aina, \ kun \ n \geq n'_\varepsilon$$

Valitaan nyt $n_0 = \max\{n_\varepsilon, \ n'_\varepsilon\}$. Tällöin voidaan arvioida seuraavasti:

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| =$$

$$= \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad aina, \ kun \ n \geq n_0$$

Valitaan nyt $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Tämä pätee, koska $a \neq b$. Kun sijoitetaan valittu arvo takaisin epäyhtälöön, saadaan arvio

$$|a - b| < \frac{2\,|a - b|}{2} = |a - b| \quad aina, \ kun \ n \geq n_0$$

Arvio on täten ristiriidassa alkuperäisen väitten kanssa, joten $a = b$. $\square$

Esimerkki 1.5. Osoitetaan määritelmää käyttäen, että $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+3}{9n^2} = -\frac{1}{9}$.

$$\left| \frac{-n^2+3}{9n^2} - \left(-\frac{1}{9}\right) \right| = \left| \frac{-n^2+3+n^2}{9n^2} \right| =$$

$$= \frac{3}{9n^2} = \frac{1}{3n^2} < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Etsitään sopiva n_ε:

$$koska\ \frac{1}{3n^2} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}}$$

Valitaan nyt $n_\varepsilon = \lceil \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}} \rceil$. Tällöin tarvittavat ehdot käyvät toteen ja raja-arvo osoitettiin oikeaksi.

Määritelmä 1.6. Jonon (a_n) *hännäksi* kutsutaan kyseisen jonon osajonoa jolle kaikilla $m \in \mathbb{N}$, määritellään jono $(a_{m+n})_{n=1}^{\infty} = (a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$. Määritelmästä on hyötyä, sillä se kertoo, että kun raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ on olemassa, myös jonon häntä suppenee samaan pisteeseen, sillä $m+n \geq n$.

Määritelmä 1.7. Jonoa (a_n) kutsutaan ylhäältä rajoitetuksi jonoksi, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ jokaiselle $n = 1, 2, \ldots$ siten, että

$$a_n \leq M$$

Vastaavasti jonoa kutstutaan alhaalta rajoitetuksi, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ jokaiselle $n = 1, 2, \ldots$ siten, että

$$m \leq a_n$$

Eli jonon (a_n) termien muodostamassa joukossa, jokainen termi on vähintään pienempi tai yhtä suuri, kuin jokin reaaliluku M. Sama käänteisesti alarajalle.

Lisäksi jonoa kutsutaan rajoitetuksi, jos se on ylhäältä sekä alhaalta rajoitettu. Tällöin on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}_+$ jokaiselle $n = 1, 2, \ldots$, että

$$|a_n| \leq M$$

Lemma 1.8. *Jokainen suppeneva jono (a_n) on rajoitettu.*

Todistus. Olkoon $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Määritelmän mukaan kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, siten, että

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Valitaan $\varepsilon = 1$. Tällöin

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad aina,\ kun\ n \geq n_1$$

Tiedetään, että $|a_n| \leq max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_1 - 1}|\},\ kun\ n \leq n_1$.

Edellinen arvio on mahdollista tehdä, koska joukossa on äärellinen määrä termejä. Käytetään lopuksi arvioinnissa hyväksi jonon häntää. Koska jonon häntä sisältää äärettömän määrän termejä, ja sen raja-arvo on sama kuin jonolla, voidaan asettaa, että

$$M = max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_1}|, 1 + |a|\}$$

jolloin saadaan toteutettua arvio ja osoitettua väite todeksi, eli

$$|a_n| \leq M$$

kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. □

Määritelmä 1.9. Jonoa $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kutsutaan

1. *kasvavaksi*, jos $a_{n+1} \geq a_n$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$

   aidosti kasvavaksi, jos $a_{n+1} > a_n$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$

2. *väheneväksi*, jos $a_{n+1} \leq a_n$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$

   aidosti väheneväksi, jos $a_{n+1} < a_n$ *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$

3. *monotoniseksi*, jos se on kasvava tai vähenevä ja *aidosti monotoniseksi*, jos se on aidosti kasvava tai vähenevä.

Lause 1.10. *Monotoninen jono suppenee, jos ja vain jos se on rajoitettu. Lisäksi monotonisille jonoille pätee:*

1. *jos jono on kasvava, niin* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$

2. *jos jono on vähenevä, niin* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$

Todistus. " $\Rightarrow$ " Oletus: Jono (a_n) on monotoninen ja jono suppenee, raja-arvonaan a.
Lemman 1.8 nojalla a_n on rajoitettu.
" $\Leftarrow$ " Oletus: Jono (a_n) on monotoninen ja rajoitettu.
Otetaan tarkasteluun kohta 1. Tällöin jono (a_n) on kasvava ja on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}$, että

$$a_n \leq M \quad kaikilla\ n = 1, 2, \ldots$$

Täydellisyysaksiooman nojalla voidaan sanoa, että joukon supremum on olemassa. Osoitetaan, että jono suppenee kohti arvoa $a \in \mathbb{R}$ ja että

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Täydellisyysaksioomasta saadaan seuraava tärkeä epäyhtälö: On olemassa sellainen n_ε, että $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Nyt käytetään epäyhtälöä hyödyksi, kun tiedetään jonon a_n olevan kasvava.

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon \quad \textit{kaikilla } n \geq n_\varepsilon$$

Koska a on joukon yläraja, epäyhtälö saa muodon

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon \quad \textit{kaikilla } n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad \textit{kaikilla } n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{kaikilla } n \geq n_\varepsilon$$

Saatiin siis raja-arvon määritelmää vastaava epäyhtälö, jolloin selvästi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Vähenevälle jonolle saadaan sama tulos. □

1.2 Jonojen laskusäännöt

Lause 1.11. *Olkoot reaalilukujonot (a_n) ja (b_n) suppenevia jonoja, raja-arvoinaan $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ sekä $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$. Tällöin seuraavat aritmeettiset operaatiot ovat voimassa jonojen raja-arvoille*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$,
3. $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot A$
4. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
5. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, *aina, kun* $(b_n) \neq 0$, *kaikilla* $n = 1, 2, \ldots$ *ja* $b \neq 0$

Todistus. Todistetaan ensimmäinen ja kolmas tapaus, niiden ollessa tarpeellisia myöhemmin tutkielmassa.

Olkoon $\varepsilon > 0$, sekä $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ ja $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$. Nyt raja-arvon määritelmän nojalla asetetaan, että

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad aina,\ kun\ n \geq n'_\varepsilon$$

Valitaan $n_0 = max\{n_\varepsilon,\ n'_\varepsilon\}$
Nyt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ saadaan muotoon

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \leq$$
$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_0$$

Siis raja-arvon määritelmän nojalla ensimmäinen väite $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ on voimassa.

Todistetaan vielä kolmas väite. Asetetaan $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ muotoon

$$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| = |(a_n \cdot b_n) + b_n \cdot a - b_n \cdot a - (a \cdot b)| =$$
$$= |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| \leq |b_n \cdot (a_n - a)| + |a \cdot (b_n - b)|$$
$$= |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \leq M\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b|$$

viimeinen arvio seuraa lemmasta 1.8.
Valitaan nyt jonojen a_n ja b_n suppenevuuden ehdolla, että

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{M} \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|a|} \quad aina,\ kun\ n \geq n'_\varepsilon$$

Valitaan $n_0 = max\{n_\varepsilon,\ n'_\varepsilon\}$ ja kirjoitetaan alkuperäinen epäyhtälö muotoon

$$|(a_n \cdot b_n) - (a \cdot b)| \leq M\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| <$$
$$< M\frac{\varepsilon}{M} + |a|\,\frac{\varepsilon}{|a|} = 2\varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_0$$

□

1.3 Cauchy-jonot

Määritelmä 1.12. Jonoa (a_n) kutsutaan *Cauchy-jonoksi*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n, m \geq n_\varepsilon$$

Cauchy-jono kertoo siis, että kun n ja m ovat tarpeeksi suuria, niin kaikki jonon a_n termit ovat mielivaltaisen (ε) lähellä toisiaan.

Lause 1.13. *Reaalilukujono* (a_n) *suppenee jos ja vain jos se on Cauchy-jono.*

Todistus. " $\Rightarrow$ " Oletus: Reaalilukujono (a_n) suppenee raja-arvonaan a. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono suppenee, on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Tällöin voidaan arvioida, että

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| =$$

$$= |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad aina,\ kun\ n, m \geq n_\varepsilon$$

Eli määritelmän mukaan (a_n) on Cauchy-jono.
" $\Leftarrow$ " Oletus: Jono (a_n) on Cauchy-jono. Tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n, m \geq n_\varepsilon$$

Seuraavaksi voidaan käänteisen kolmioepäyhtälön avulla arvioida, että

$$|a_n| - |a_m| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n, m \geq n_\varepsilon$$

Ja kun asetetaan, että $m = n_\varepsilon$, saadaan arvio

$$|a_n| < \varepsilon + |a_{n_\varepsilon}| \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Tällöin voidaan asettaa jonon maksimiksi
$M = max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots, |a_{n_\varepsilon - 1}|, 1 + |a_{n_\varepsilon}|\}$.
Eli jono on rajoitettu, rajanaan $|a_n| \leq M$. Nyt Bolzanon-Weierstrassin lauseen nojalla tiedetään, että rajoitetulla jonolla on ainakin yksi suppeneva osajono. Käytetään tätä tietoa hyväksi ja valitaan suppeneva osajono (a_{n_k}) raja-arvonaan $A \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n'_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n_k \geq n'_\varepsilon$$

Koska oletuksena oli, että a_n on Cauchy-jono, voidaan tehdä seuraava arvio. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $n''_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n, n_k \geq n''_\varepsilon$$

Valitaan nyt, että $n_k \geq max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ ja arvioidaan

$$|a_n - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_k$$

Eli määritelmän mukaisesti jono a_n suppenee raja-arvonaan A. $\square$

2 Sarjat

2.1 Sarjojen suppeneminen

Määritelmä 2.1. Jonoa s_n kutsutaan reaalilukujonoon $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ liittyväksi *osasummien jonoksi* eli *sarjaksi*. Asetetaan, että

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 \ldots + a_n \quad kun\ n = 1, 2, \ldots$$

Määritelmä 2.2. Sarjan sanotaan suppenevan kohti lukua $S \in \mathbb{R}$, jos raja-arvo $\lim_{n\to\infty} s_n$ on äärellisenä olemassa, eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = S$$

Jos sarja ei suppene, niin se hajaantuu.

Määritelmä 2.3. Sarjan $\sum_{k=1}^{n} a_k$ jäännöstermiksi kutsutaan sarjaa

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k = S - s_n$$

eli alkuperäisen sarjan n -termin jälkeistä osaa.

Lemma 2.4. *Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, jos ja vain jos sen jäännöstermien muodostama jono suppenee kohti nollaa.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletus: Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee. Nyt tiedetään, että raja-arvo $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ on olemassa. Jonon raja-arvon määritelmästä saadaan, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n - S| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Tällöin kun valitaan ε lähelle nollaa, ehto toteutuu.

"$\Leftarrow$" Oletus: Sarjan jäännöstermien jono suppenee kohti nollaa. Huomataan, että sama pätee kääntäen, sillä $|s_n - S| = |S - s_n| < \varepsilon$ Eli sarjan s_n raja-arvolle löytyy raja-arvon määritelmää vastaavat termit. $\square$

Esimerkki 2.5. Tarkastellaan niin kutsuttua *teleskooppisarjaa*, joka on muotoa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Käytetään osamurtokehitelmää jonka jälkeen tutkitaan sarjan arvoa määritelmän mukaisella tavalla. Asetetaan nyt

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \Leftrightarrow 1 = A(k+1) + Bk \Leftrightarrow 1 = A + k(A+B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ k(A+B) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ k + kB = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Tällöin alkuperäinen sarja saadaan muotoon

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Nyt määritelmän mukaisesti tutkitaan sarjan arvoa raja-arvon avulla. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Eli sarja suppenee ja sen arvo on 1.

Esimerkki 2.6. Tiedetään, että geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ suppenee jos ja vain jos $|x| < 1$. Tällöin sarjan arvo on $\frac{1}{1-x}$. Väitteen todistus löytyy lähteen [2] sivuilta 20-21.
Tutkitaan nyt sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^{k+1}}{3^k}$ suppenemista ja sen arvoa.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \frac{2^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 + 2 \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + 6 - 2 = \frac{9}{2}$$

Lemma 2.7. *Olkoon suppeneva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tällöin $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Todistus. Koska sarja $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, raja-arvo $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$ on olemassa. Tiedetään, että $a_n = s_n - s_{n-1}$, tällöin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$$

$\square$

Huomautus 2.8. Lemma 2.6 sanoo ainoastaa, että jos $lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$ tällöin siihen liittyvä sarja hajaantuu. Tämä on kuitenkin tehokas tapa tarkastella ensimmäisenä työkaluna uutta sarjaa.

2.2 Itseinen ja ehdollinen suppeneminen

Määritelmä 2.9. Sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sanotaan suppenevan *itseisesti*, eli *absoluuttisesti*, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ suppenee. Sarjan sanotaan suppenevan ehdollisesti, jos se hajaantuu itseisesti, mutta muutoin suppenee.

Esimerkki 2.10. Tutkitaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ suppenemista. Suppeneeko sarja itseisesti? Nyt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \ldots >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

Minoranttiperiaatteen nojalla sarja hajaantuu, eli sarja ei suppene absoluuttisesti. Tutkitaan seuraavaksi suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Tarkastellaan sarjoja s_{2n} ja s_{2n+1}:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

Huomataan, että s_{2n} on kasvava jono. Nyt

$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} =$$

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

Huomataan että s_{2n+1} on taasen vähenevä jono. Koska jonoissa on yhden termin ero, on helppo huomata yhtäsuuruus $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$.
Jonoille pätee myös epäyhtälö

$$\frac{1}{2} \leq s_{2n} + \frac{1}{2n+1} = s_{2n+1} \leq 1$$

Tämä osoittaa, että jonot ovat myös rajoitetut, jolloin monotonisen suppenemisen lauseen nojalla (viittaus) kummankin jonon raja-arvot ovat olemassa. Asetetaan $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = S$ ja $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = S'$ Jonojen laskusääntöjen mukaan

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

Jolloin saadaan tulos $S = S'$. Eli jonojen raja-arvot ovat samat.
Jonon raja-arvon määritelmästä saadaan, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset n_S ja $n_{S'} \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|s_{2n} - S| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_S$$

sekä

$$|s_{2n+1} - S| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_{S'}$$

Valitaan nyt $n_\varepsilon = \max\{n_S, n_{S'}\}$. Tällöin saadaan arvio

$$|s_n - S| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_\varepsilon$$

Eli jonon s_n raja-arvo on sama kuin tutkituilla sarjoilla. Siis tutkittu sarja suppenee. Osoitettiin siis, että alternoiva harmoninen sarja suppenee ehdollisesti.

Lause 2.11. *Ehdollisesti suppeneva sarja sisältää äärrettömän monta positiivista ja negatiivista termiä, sekä näille pätee, että* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm} = \pm\infty$.

Todistus. Positiivisten ja negatiivisten termien olemassaolo on nähtävissä, kun tarkastellaan ehdollisen suppenemisen määritelmää positiivisillä ja negatiivisillä termeillä.
Olkoon $a_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, eli sarja suppenee itseisesti.
Olkoon $a_k < 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, eli sarja suppenee itseisesti.
Myös tilanteessa $a_k = 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ sarja suppenee itseisesti.
Valitaan seuraavaksi mielivaltainen ehdollisesti suppeneva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, ja asetetaan, että $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Asetetaan sarjan positiivisten termien summalle merkintä

$$\alpha_i = a_1^+ + a_2^+ + a_3^+ + \ldots + a_n^+$$

sekä sarjan negatiivisten termien ($a_n^- = -a_n'$) summalle merkintä

$$\beta_j = a_1^- + a_2^- + a_3^- + \ldots + a_n^- = -a_1' - a_2' - a_3' - \ldots - a_n'$$

$$-(a_1' + a_2' + a_3' + \ldots + a_n')$$

Tässä jaottelussa $n = i + j$. Merkitään myös näiden termien absoluuttista sarjaa $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Nyt siis

$$s_n = \alpha_i + \beta_j \quad ja \quad \gamma_n = \alpha_i - \beta_j$$

Muodostetaan yhtälöistä sellaiset, että voidaan erotella positiiviset ja negatiiviset termit:

$$s_n + \gamma_n = \alpha_i + \beta_j + \alpha_i - \beta_j = 2\alpha_i \Rightarrow \alpha_i = \frac{1}{2}(s_n + \gamma_n)$$

$$s_n - \gamma_n = \alpha_i + \beta_j - \alpha_i + \beta_j = 2\beta_j \Rightarrow \beta_j = \frac{1}{2}(s_n - \gamma_n)$$

Koska tarkastellaan ehdollisesti suppenevaa sarjaa, tiedetään, että seuraavat raja-arvot ovat olemassa: $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ ja $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$.
Tällöin positiivisten termien raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(s_n + \gamma_n) = \infty$$

Ja negatiivisten termien raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \beta_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(s_n - \gamma_n) = -\infty$$

Eli positiivisia ja negatiivisia termejä on äärettömän monta sekä niiden sarjat hajaantuvat, kuten haluttiin osoittaa. □

2.3 Vuorottelevat sarjat

Määritelmä 2.12. Sarjaa, joka on muotoa

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

missä $a_k \geq 0$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ kutsutaan *vuorottelevaksi* sarjaksi.

Lause 2.13. *Vuorotteleva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ suppenee, jos $|a_k|$ on monotonisesti laskeva ja $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Todistus. Esimerkkiä 2.15 mukaillen saadaan yleinen todistus seuraavasti. Olkoon vuorotteleva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ ja oletetaan, että lauseen ehdot pätevät. Tällöin sarjalla on osasumma

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

josta saadaan epäyhtälö

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) < a_1$$

Huomataan myös, että osasumma on on kasvava, sillä

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Lauseen 2.10 nojalla, koska S_{2n} on kasvava sekä rajoitettu, se suppenee. Asetetaan, että $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Seuraavaksi tarkastellaan osasummaa S_{2n+1}. Tehdään heti alkuun huomio, että $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2k+1}$. Koska oletuksena on, että a_k suppenee kohti nollaa, voidaan arvioida, että

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + a_{2k+1} = S + 0 = S$$

Nyt kuten esimerkissä 2.15, voidaan osoittaa, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$|s_n - S| < \varepsilon \quad aina, \; kun \; n \geq n_\varepsilon$$

Eli alkuperäinen jono suppenee oletuksien nojalla. □

2.4 Sarjojen laskusäännöt

Lause 2.14. *Olkoon suppenevat sarjat* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ *ja* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$. *Näiden sarjojen välillä pätevät seuraavat aritmeettiset operaatiot:*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = A + B$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = cA, \; c \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k + db_k) = cA + dB, \; c, d \in \mathbb{R}$

Todistus. Todistukset seuraavat raja-arvojen laskusäännöistä.
Ensimmäinen kohta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + B$$

Kolmas kohta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k + db_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (ca_k + db_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} ca_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} db_k =$$

$$= c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + d \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = cA + dB$$

□

Huomautus 2.15. Kolmannen kohdan tilanteessa, sarjan $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ suppenemisesta ei välttämättä seuraa, että sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevat.

Esimerkiksi

$$\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k + (-1)^{k+1}) = 0$$

mutta sarjat $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ hajaantuvat.

Seuraavaksi tarkastellaan sarjojen kertolaskuja, niiden ollessa ominaisuuksiltaan erilaisia yllä olevan lauseen operaatioihin nähden. Kahden sarjan kertolaskussa tarkastellaan niiden välisten yksittäisten termien tuloa, jotka lopuksi summataan yhteen.

Esitetään kolme erilaista, toisistaan alkuehtojen pohjalta eroavaa tapaa muodostaa kahden sarjan välinen kertolasku.

Lause 2.16. *(Cauchyn tulo) Olkoon sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ absoluuttisesti suppenevia. Tällöin sarja*

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} a_k b_n$$

suppenee absoluuttisesti kohti tuloa

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = AB$$

Todistus. Todistettu teoksessa [4] sivulla 61. □

Lause 2.17. *(Mertens) Olkoon sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevia siten, että ainakin toinen on absoluuttisesti suppeneva. Tällöin sarja*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

suppenee.

Todistus. Olkoon $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluuttisesti suppeneva sarja ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ehdollisesti suppeneva sarja.
Lisäksi olkoon sarjojen arvot $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$. Tällöin näille sarjoille pätee, että kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa sellaiset $n_a, n_b \in \mathbb{Z}_+$, että

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_a \text{ sekä } \left|\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon \quad aina,\ kun\ n \geq n_b$$

Valitaan nyt, että $n_\varepsilon = max\{n_a, n_b\}$ sekä olkoon $n \geq 2n_\varepsilon$.

Tarkastellaan seuraavaksi sarjojen tulon suppenemista määritelmän nojalla. Asetetaan

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{m=k}^{n} b_{m+1-k} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right|$$

Nyt olkoon $j = m + 1 - k$. Tällöin yllä oleva yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n+1-k} b_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right|$$

Lisätään ja vähennetään seuraavaksi sama termi, jotta voidaan aloittaa epäyhtälön arviointi.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n+1-k} b_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n+1-k} b_j - \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{\infty} b_j + \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{n+1-k} b_j - \sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{j=1}^{n+1-k} b_j\right)\right| + \left|\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right|$$

Käytettiin kolmioepäyhtälöä ja itseisarvojen sisällä olevien termien vähennyslaskun kommutatiivisuutta. Lopuksi vielä sarjat kirjoitettiin selvempään muotoon.

Nyt, koska alussa asetettiin $n \geq 2n_\varepsilon$, voidaan arvioida, että

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j \right| + \left| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} a_k \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \cdot \varepsilon \right| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| \left| \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right| \leq$$

Viimeisessä termissä vaihdettiin indeksointi k:sta j:hin.
Seuraavaksi käytetään tietoa, että $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenee. Koska sarja suppenee, lemman 1.8 mukaan tällöin $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ on rajoitettu. Tästä seuraa, että myös $\left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right|$ ja $\left| \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j \right|$ ovat rajoitettuja. Valitaan nyt ylärajaksi $M = sup\{ \left| \sum_{j=k}^{\infty} b_k \right| | k = 1, 2, \ldots \}$. Tällöin voidaan jatkaa arviointia, ja kirjoittaa

$$\left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \cdot \varepsilon \right| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| \left| \sum_{j=n+2-k}^{\infty} b_j \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \right| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |a_k| M + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| M =$$

$$= \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \right| + M \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \right) \leq$$

$$\leq \varepsilon \left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \right| + M (\varepsilon + \varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \left(\left| \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} a_k \right| + 2M \right) =$$

Nyt, koska sulkujen sisällä olevat termit ovat kummatkin vakioita, voidaan todeta, että raja-arvon ehto toteutuu, sillä epsilon voidaan valita mielivaltaisen pieneksi. □

Lause 2.18. *(Abelin menetelmä) Olkoon suppenevat sarjat*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \text{ sekä sarja } C = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k}$$

Jos sarja

$$C = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k}$$

suppenee, niin $C = AB$.

Todistus. Todistettu teoksessa [4] sivulla 64. □

Yllä olevia sarjojen tuloja voidaan havainnollistaa seuraavasti.
Olkoon sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ suppenevia. Tällöin niiden Cauchy tulo on muotoa

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = (a_1b_1 + a_2b_0 + \ldots) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 + \ldots) +$$

$$+(a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 + \ldots) + \ldots$$

Kun asetetaan kaikkien niiden termien arvo nollaksi, joiden alaindeksi on pienempi kuin yksi, saadaan yllä oleva yhtälö muotoon

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \ldots$$

Tämä kertolasku voidaan järjestää nyt tulkittavaan muotoon

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots & a_1b_n & \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots & a_2b_n & \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots & a_3b_n & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \ldots & a_nb_n & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Tällöin sarjaa

$$C_n = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = \sum_{m=1}^{n} c_m$$

voidaan kuvata yhteenlaskemalla yllä olevan matriisin diagonaalisten rivien alkiot yhteen. Tehdään näin kolmelle ensimmäiselle osasummalle.

$$C_1 = \sum_{m=1}^{1} c_m = \sum_{m=1}^{1}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m+1-k} = a_1b_1$$

$$C_2 = \sum_{m=1}^{2} c_m = a_1b_2 + a_2b_1$$

$$C_3 = \sum_{m=1}^{3} c_m = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$$

3 Riemannin sarjateoreema

3.1 Termien permutaatiot

Määritelmä 3.1. Sarjan termien uudelleenjärjestelyksi eli *permutaatioksi* kutsutaan bijektiota $\varphi : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$. Funktio kuvaa jokaisen sarjan termin paikan uudelleen, joko pitäen sen alkuperäisellä paikallaan tai vaihtaen sen paikkaa. Asetetaan, että $a_{\varphi(k)} = b_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, tällöin sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ kutsutaan alkuperäisen sarja uudelleenjärjestelyksi.

Huomautus 3.2. Uudelleenjärjesteltyä ääretöntä sarjaa täytyy käsitellä uutena sarjana, sillä termien paikkojen vaihto saattaa vaikuttaa sarjan suppenemiseen kuten seuraavassa esimerkissä osoitetaan.

Esimerkki 3.3. Tiedetään, että alternoiva harmoninen sarja suppenee ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ln(2)$$

Tämä on raja-arvo on osoitettu teoksen [3] sivuilla 36-38.
Kun avataan sarja ja järjestellään termit uudelleen, saadaan esimerkiksi seuraava tulos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$$

josta saadaan uudelleenjärjestelemällä

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \ldots =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots\right) = \frac{1}{2} ln(2)$$

Kuten huomataan, uudelleenjärjestely vaikutti tässä tapauksessa sarjan arvoon, sillä selvästi $ln(2) \neq \frac{1}{2} ln(2)$. Merkitään nyt käytettyä permutaatiota $\varphi_1(k)$, jolloin saadaan uudelle arvolle sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi_1(k)}}{\varphi_1(k)} = \frac{1}{2} ln(2)$$

Lause 3.4. *(Riemannin sarjateoreema) Olkoon ehdollisesti suppeneva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Tällöin sarjalle on olemassa sopiva permutaatio siten, että sarjan uudelleenjärjestely $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ saa minkä tahansa seuraavista ominaisuuksista:*

1. *Sarja saadaan suppenemaan kohti mitä tahansa lukua $S \in \mathbb{R}$.*

2. *Sarja saadaan hajaantumaan kohti ∞ sekä $-\infty$.*

3. *Sarjan ylä- ja alarajoiksi voidaan valita mitkä tahansa luvut $y, x \in \mathbb{R}$ siten, että $y \geq x$.*

Todistus. Osoitetaan kohta kolme, sillä ensimmäinen ja toinen kohta ovat kolmannen kohdan erityistapauksia. Tämä käy selväksi, kun asetetaan, että $y = x = S$ tai $y = x = \pm\infty$.
Olkoon nyt suppenevat reaalilukusarjat (x_n) ja (y_n) raja-arvoinaan x ja y siten, että $(x_n) < (y_n)$ ja $y_1 > 0$.

Merkitään seuraavaksi, että sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ positiiviset termit ovat $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ja negatiivisten termien absoluuttiset arvot ovat $q_1, q_2, q_3, \ldots$ niiden esiintymisjärjestyksessä alkuperäisen sarjan mukaan.

Nyt lauseen 2.12 nojalla summat $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ hajaantuvat. Tehdään samalla oletus, ettei niiden sisällä ole "turhia" termejä, joiden arvo on nolla, sillä ne eivät vaikuta sarjan arvoon ja täten eivät myöskään todistukseen.

Tehdään myös seuraava huomio. Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee, tällöin lemman 2.6 nojalla myös $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, josta seuraa, että myös jonon osajonot suppenevat samaan raja-arvoon, eli $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ ja $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$.

Osoitetaan seuraavaksi, että sarja

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{k_1} + p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \ldots +$$

$$p_{m_2} - q_{k_1+1} - q_{k_1+2} - \ldots - q_{k_2} + p_{m_2+1} + \ldots$$

toteuttaa halutut ehdot.

Selvästi sarja on alkuperäisen sarjan uudelleenjärjestely. Sarjassa myös positiivisten ja negatiivisten termien järjestys omanmerkkisiin termeihin nähden ei muutu.

Olkoon nyt $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ ja $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$. Tällöin voidaan valita sellainen määrä positiivisia termejä, että

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1} > y_1 \quad \text{sekä} \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_{m_1 - 1} \leq y_1$$

Voidaan valita myös sellainen määrä negatiivisia termejä, että

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{k_1} < x_1 \quad \text{sekä} \quad q_1 + q_2 + \ldots + q_{k_1 - 1} \geq x_1$$

Edelleen, saadaan valittua myös sellainen määrä positiivisia termejä, että

$$p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \ldots + p_{m_2} > y_2 \text{ sekä } p_{m_1+1} + p_{m_1+2} + \ldots + p_{m_2-1} \leq y_2$$

Ja sama negatiivisille termeille

$$q_{k_1+1} + q_{k_1+2} + \ldots + q_{k_2} < x_2 \text{ sekä } q_{k_1+1} + q_{k_1+2} + \ldots + q_{k_2-1} \geq x_2$$

Tätä voidaan jatkaa loputtomiin, koska kyseessä on hajaantuvat sarjat. Tämä myös kertoo, että tarpeeksi monen positiivisen termin summa saadaan mielivaltaisen isoksi, sekä negatiivisten termien summa mielivaltaisen pieneksi.
Merkitään nyt käytettyä uudelleenjärjestelyä ja sen muodostamaa summaa $s' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$. Lisäksi merkitään sen termeihin $p_{m_1}, p_{m_2}, \ldots$ päättyviä osasummia $\rho_1, \rho_2, \ldots$, sekä termeihin $q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots$ päättyviä osasummia $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ilmestymisjärjestyksessä.
Huomioidaan, että $\rho_1 > y_1$ ja $\eta_1 < x_1$. Yllä olevien osasummien arvioista nähdään, että tämä toteutuu kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, jolloin voidaan arvioida seuraavasti:

$$|\rho_n - y_n| < p_{m_n} \quad \text{ja} \quad |\eta_n - x_n| < q_{k_n}$$

Koska tiedetään, että $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ ja $\lim_{k\to\infty} q_k = 0$, on yllä olevien epäyhtälöiden toteutettava $\lim_{n\to\infty} \rho_n \to y$ ja $\lim_{k\to\infty} \eta_n \to x$. Voidaan nyt sanoa, että x ja y edustavat sarjan osasummien kasautumispisteitä. Koska osasumma $s'_n \neq \rho_n$ ja $s'_n \neq \eta_n$, sen arvon on oltava näiden arvojen välillä, eli $s'_n \in [\eta_n, \rho_n]$. Toisin sanoen osasummalla s'_n ei ole kasautumispisteitä välin $[x, y]$ ulkopuolella.
Täten siis pisteet x ja y ovat sarjan s' osasummien ylä- ja alaraja-arvot. $\square$

Lähdeluettelo

[1] K. Knopp: *Theory and Application of Infinite Series*. Hafner Publishing Company, New York, 1971.

[2] P. Hästö: *Sarjat ja integraalit - luentomoniste*. Oulun yliopisto, 2011.

[3] O. E. Stanaitis: *An Introduction to Sequences, Series, and Improper Integrals*. St. Olaf College, Minnesota 1967.

[4] V. S. Serov: *Classical Analysis of Real-Valued Functions*. PunaMusta Oy, Oulu, 2019.